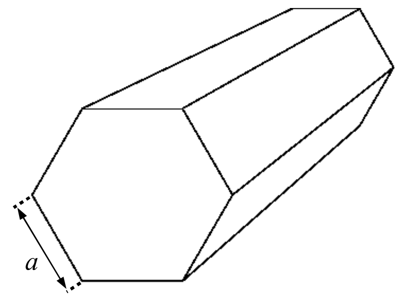
A 29. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatai[1]

Elméleti forduló

1. feladat. Szabályos hatszög alakú hasáb gördülése

Tekintsünk egy hosszú, merev, szabályos hatszög alapú egyenes hasábot, amilyen pl. egy ceruza. A hasáb tömege M homogén sűrűséggel. A szabályos hatszög mindegyik oldaléle a. A hatszögű hasáb középtengelyére vonatkoztatott I tehetetlenségi nyomatéka:



Egy szabályos hatszög keresztmetszetű hasáb

(1.1) $$I = \frac{5}{12} Ma^2$$

A hasáb egy hosszanti élére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

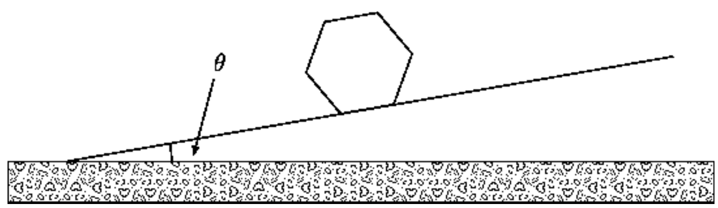
(1.2) $$I' = \frac{17}{12} Ma^2$$

a) A hasáb kezdetben nyugalomban van, tengelye vízszintesen fekszik egy sík lejtőn, aminek a vízszintessel képezett θ hajlásszöge kicsi. Tételezzük fel, hogy a henger oldallapjai enyhén konkávak, így a hasáb csak oldalélei mentén érinti a lejtőt. De ennek a csekély behajlásnak a tehetetlenségi nyomatékra gyakorolt hatását elhanyagolhatjuk. A hasábot mozdítsuk ki nyugalmi állapotából, így az nemegyenletes mozgással legurul a lejtőn. Feltételezzük, hogy a súrlódás bármilyen csúszást megakadályoz, valamint hogy a hasáb mindvégig érintkezik a lejtővel. Mielőtt egy adott él éppen megérinti a lejtőt, a szögsebesség legyen ω_i, közvetlenül az él-lejtő érintkezés után pedig ω_f .

Mutassuk meg, hogy

(1.3) $$\omega_f = s \cdot \omega_i ,$$

és határozzuk meg az s együttható értékét!



Szabályos hatszög keresztmetszetű hasáb a lejtőn

b) A hasáb mozgási energiája közvetlenül az érintés előtt K_i és közvetlenül utána K_f.

Mutassuk meg, hogy

(1.4) $$K_f = r \cdot K_i$$

és az r együttható értékét adjuk meg!

c) Ahhoz, hogy egy következő él is érintse a lejtőt, K_i-nek nagyobbnak kell lennie egy minimális $K_{i,min}$ értéknél. Ez utóbbi így irható:

(1.5) $$K_{i,min} = \delta \cdot Mga .$$

Itt $g = 9.81\ m/s^2$ a nehézségi gyorsulás.

Határozzuk meg δ -t a lejtő θ hajlásszögének és az r együtthatónak a függvényeként.

(Használjuk az r algebrai jelölést és ne a számértékét.)

d) Ha a c) alkérdés feltétele teljesül, akkor a K_i mozgási energia egy meghatározott $K_{i,0}$ értékhez tart miközben a hasáb gördül a lejtőn.

Annak ismeretében, hogy ez a határérték létezik, mutassuk meg hogy $K_{i,0}$ így írható:

---

1 Készült a **KöMaL** felhasználásával. A feladatok megoldására 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére.

(1.6) $$K_{i,0} = \kappa \cdot Mga \ .$$

Fejezzük ki κ értékét θ és r függvényeként!

e) Számítsuk ki 0,1° pontossággal, hogy mi a lejtő hajlásszögének az a minimuma, amelynél a nemegyenletes gördülés – ha egyszer elindult – végtelen hosszan folytatódni fog!

2.feladat. Víz a jégmező alatt

A jégmező szilárd talajon helyezkedik el, függőleges vastagsága néhány km, vízszintes kiterjedése többször 10 vagy 100 km. A feladatban a jég olvadását fogjuk tanulmányozni és azt, hogy miként viselkedik a víz 0 °C hőmérsékletű jégtömb alatt. Feltételezzük, hogy ilyen feltételek mellett a nyomásváltozások a jégben (akárcsak viszkózus folyadékban) lényegében függőleges elmozdulásokat okoznak. E feladat megoldásánál a következő adatokat használhatjuk:

A víz sűrűsége:	$r_w = 1{,}000 \cdot 10^3$ kg/m^3
A jég sűrűsége:	$r_i = 0{,}917 \cdot 10^3$ kg/m^3
A jég fajhője:	$c_i = 2{,}1 \cdot 10^3$ J/(kg°C)
A jég olvadáshője:	$L_i = 3{,}4 \cdot 10^5$ J/kg
A kőzet és a magma sűrűsége:	$r_r = 2{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3
A kőzet és a magma fajhője:	$c_r = 700$ J/(kg°C)
A kőzet és a magma olvadáshője:	$L_i = 4{,}2 \cdot 10^5$ J/kg
A Föld felületén kilépő átlagos hőáramsűrűség:	$J_Q = 0{,}06$ W/m^2
A jég olvadáspontja:	$T_o = 0$°C, állandó

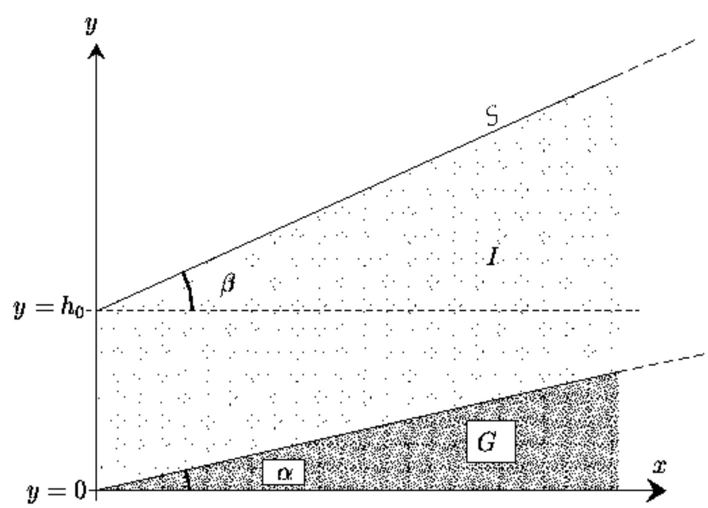
a) Tekintsünk egy vastag jégmezőt, amely alatt hő áramlik fel a Föld mélyéből. A fenti adatokat használva számítsuk ki, hogy évente milyen d vastagságú jégréteg olvad el.

b) Tekintsünk egy jégtömb felső, sík felszínét. A jégtábla alatt a szikla-lejtő hajlásszöge α. A jégtábla sík felszínének hajlásszöge β. A jég függőlegesen mért vastagsága az $x = 0$ helyen h_o. Eszerint a jégtáblát alul és felül határoló síkok egyenlete:

(2.1) $$y_1 = x \cdot \mathrm{tg}\alpha, \ \ y_2 = h_0 + x \cdot \mathrm{tg}\beta$$

Fejezzük ki a p nyomást a jégtábla alján az x vízszintes koordináta függvényeként!

Fogalmazzuk meg matematikailag α és β függvényében annak feltételét, hogy a jégtábla és a sziklatalaj közt a víz ne folyjék egyik irányba sem.

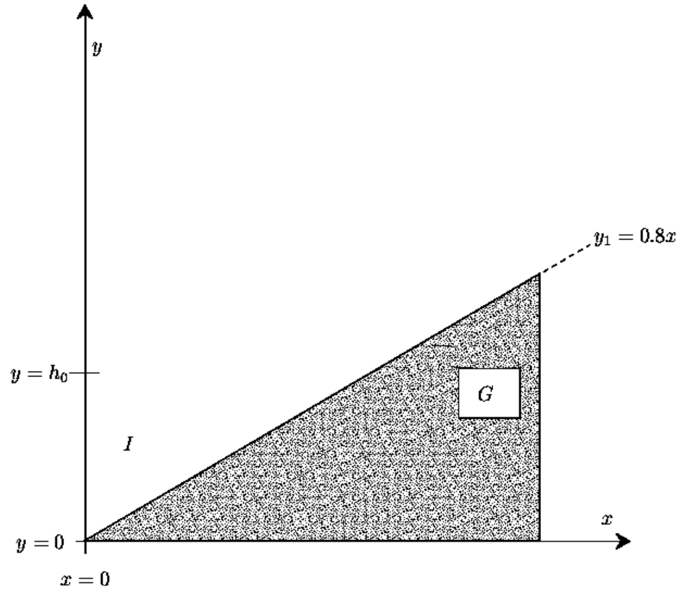


Lejtőn lévő sík felszínű jégtömb keresztmetszete

S: felület (surface), G: talaj (ground), I: jégtömb (ice cap)

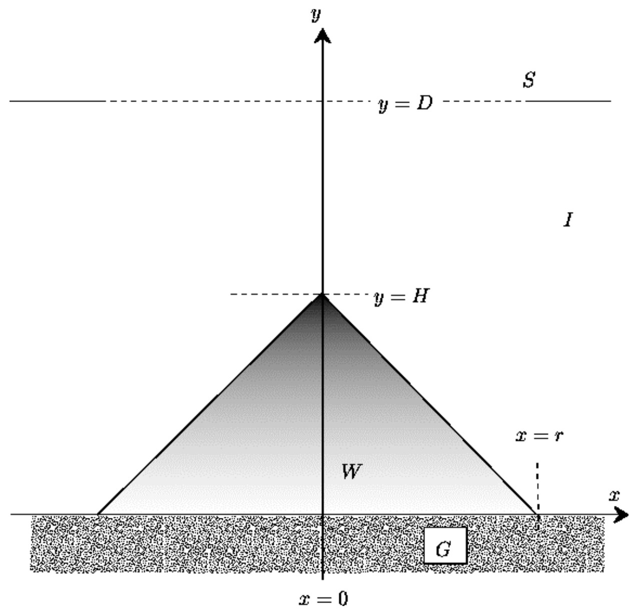
Mutassuk meg, hogy ez a feltétel $\mathrm{tg}\beta = s \cdot \mathrm{tg}\alpha$ alakban írható! Határozzuk meg az s együtthatót!

Az ábrán az $y_1 = 0{,}8\ x$ vonal a sziklatalaj menetét mutatja a jégtábla alatt. A jég függőlegesen mért h_o vastagsága az $x = 0$ helyen 2 km. Tételezzük fel, hogy a víz a jégtábla alatt egyensúlyban van.



Egy 0°C hőmérsékletű jégtábla úgy nyugszik egy sziklalejtőn, hogy a jég alatt a víz egyensúlyban van G: talaj (ground), I: jégtábla (ice cap)

Az ábrába rajzoljuk be az y_1 egyenest, és rajzoljuk fölé a jégtábla felszínét jelző y_2 egyenest is. Jelezzük az ábrán, melyik vonal melyiket jelenti.



A jégben kialakult vízkúp függőleges keresztmetszete S: jégfelület W: víz, G: szilárd talaj, I: jégtömb

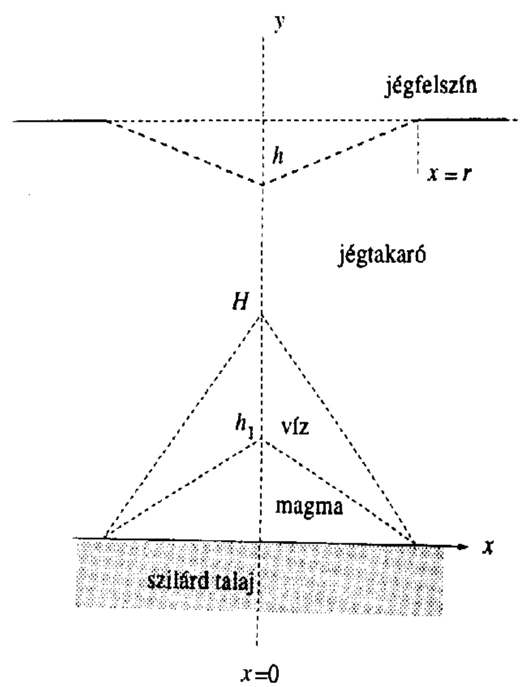
c) Egy vízszintes talajon elhelyezkedő nagykiterjedésű jégtábla kezdetben D = 2,0 km vastag. Ekkor a jég viszonylag gyors megolvadása révén egy H = 1,0 km vastag, r = 1,0 km sugarú, kúp alakú víztömeg alakul ki. Tételezzük fel, hogy a visszamaradt jégtömeg ehhez az új állapothoz úgy alkalmazkodik, hogy benne csak függőleges elmozdulások mennek végbe.

Vezessük le képletekkel, és rajzoljuk le a jégtábla felső felületének alakját a vízkúp képződése és a hidrosztatikus egyensúly beállta után.

d) Egy nemzetközi kutatócsoport expedíciói évente megvizsgálják az Antarktisz 0 °C hőmérsékletű jégtakaróját. Ennek felszíne normálisan egy vízszintes felületű, kiterjedt jégréteg. De most egy mély, kráterszerű mélyedésre bukkannak, ami olyan, mint egy felfordított kúp, amelynek legnagyobb h bemélyedése 100 m és r sugara 500 m.

Tapasztalataikat megbeszélve a kutatók arra a következtetésre jutnak, hogy a jég alatt kisebb vulkánkitörés történhetett. Egy kevés olvadt magma benyomult a jégréteg aljába, ott megdermedt és lehűlt, eközben bizonyos mennyiségű jeget megolvasztott. A kutatók megpróbálják megbecsülni a behatolt magma térfogatát, hogy megértsék, mitől lett a megolvadt víz. Gondolatmenetük a következő:

Tételezzük fel, hogy a jégben csak függőleges mozgás ment végbe. Azt is tételezzük fel, hogy a behatoló magma 1200 °C hőmérsékleten teljesen folyékony állapotú volt. Az egyszerűség kedvéért még azt is feltehetjük, hogy a



A kúp alakú jég-bemélyedés centrális függőleges síkmetszete. (Az ábra nem méretarányos) benyomulás kúp alakban történt, körszerűen a megfigyelt kúpos jég-bemélyedés alatt. A magma behatolása viszonylag rövid idő alatt ment végbe a hőkicserélődés időigényéhez képest. A hőátadás kezdetben elsősorban függőleges irányú volt, így a jégből kiolvadt térfogat mindig kúp alakú volt, a kúp tengelye pedig a magma-benyomulás centrumán átmenő függőleges volt.

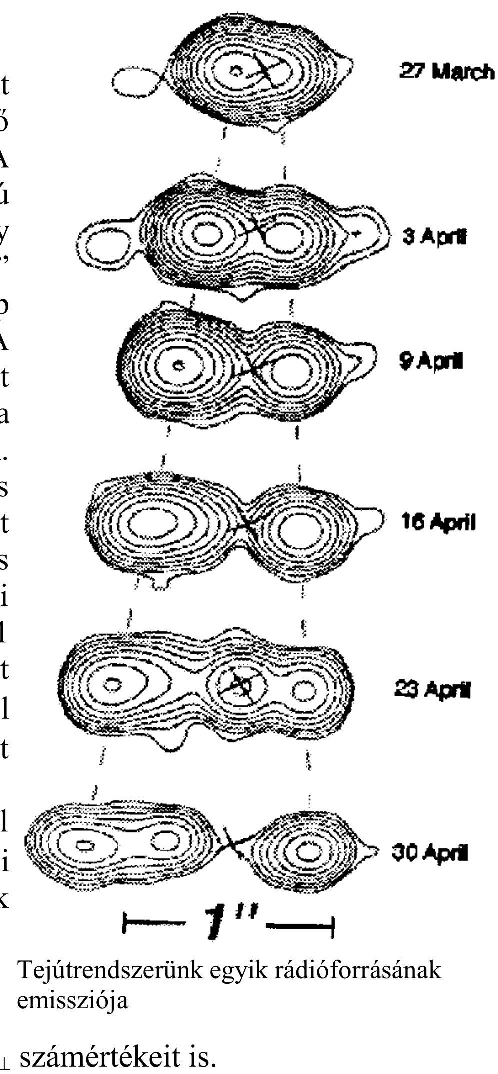
Ezen feltételek mellett a jég megolvadása két lépésben ment végbe. Először a víz nincs nyomás-egyensúlyban a magma fölött, hanem elfolyik onnan. Az elfolyó víz 0 °C hőmérsékletűnek tételezhető fel. Később beáll a hidrosztatikai egyensúly, a víz a keletkezési helyén, a magma-benyomulás felett marad, nem folyik el. Számítsuk ki a következő mennyiségeket a hőmérsékleti egyensúly beálltakor:

1. A jégtakaró alatt kialakult vízkúp tetőpontjának H magassága a jégtábla alapjának eredeti szintjéhez képest.
2. A magma behatolás h_1 magassága.
3. A keletkezett víz teljes m_t tömege és az elfolyt víz m' tömege.

Milliméterpapíron ábrázoljuk méretarányosan a magma-behatolás és a visszamaradt víztömeg alakját! Az ábra által sugallt koordináta-rendszert használjuk!

3.feladat. A fénynél sebesebben?

Ebben a feladatban egy 1994-ben elvégzett mérést elemzünk és értelmezünk. A mérés egy a Tejútrendszerben lévő összetett forrás rádióhullámú sugárzására vonatkozik. A szélessávú vevőantenna centiméteres hullámhosszú rádióhullámokra volt hangolva. Az ábra azt mutatja, hogy különböző időpontokban milyen képet láttak. A „szintvonalak” az azonos intenzitásokat jelzik, mint ahogyan a földrajzi térkép szintvonalai az azonos magasságú pontokat kötik össze. A képen látható és szaggatott vonalakkal érzékeltetett két maximumot úgy értelmezik, hogy két objektum távolodik a közös centrumtól. Ezt a centrumot keresztek jelzik az ábrákon. (A centrumról feltételezik, hogy nyugszik a térben; ez is erős rádióforrás, de főleg más hullámhosszon sugároz.) A méréseket több, mint egy hónapon át mindig azonos napszakban, azonos órában végezték el. Az ábra léptékét egy skálaszakasz jelzi, ami egy ívmásodpercnek felel meg (1 ívmásodperc = 1 arc sec =1 as = 1/3600 szögfok). A centrumban kereszttel jelölt égitest becsült távolsága R = 12,5 kpc. 1 kpc $3{,}09 \cdot 10^{19}$ m-nek felel meg. A fény sebessége: c = $3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s. A feladat megoldásában nem kell hibaszámítást végezni.



Tejútrendszerünk egyik rádióforrásának emissziója

a) A két kidobott rádióforrás szögtávolságát a centrumtól $\Theta_1(t)$ és $\Theta_2(t)$ jelöli. (Jelölés: 1 a bal oldali, 2 a jobb oldali forrás, t a megfigyelés ideje.) A Földről látszó szögsebességek ω_1 és ω_2 . A két rádióforrásnak megfelelő transzverzális (keresztirányú) sebességek: $v_1'{}_\perp$ és $v_2'{}_\perp$.

Az ábra alapján határozzuk meg ω_1 és ω_2 értékét ezredívmásodperc/nap egységekben. Határozzuk meg $v_1'{}_\perp$ és $v_2'{}_\perp$ számértékeit is. (Némelyik eredményt meglepőnek fogod találni.)

b) Az előző alkérdésben támadt probléma feloldása érdekében képzelj el egy forrást, ami $\vec{v}$ sebességgel mozog egy tőle távoli O megfigyelő irányához képest φ szögben ($0 \le \varphi \le \pi$) . A sebesség nagyságát jelölje $v = \beta c$, ahol c a fénysebesség. A fényforrás távolságát a megfigyelő R-nek méri, a fényforrás szögsebességét ω-nak észleli. A látásirányra merőleges látszólagos sebesség $v'_\perp$.

Határozzuk meg ω és $v'_\perp$ értékeit β, R és φ függvényében!

c) Feltételezzük, hogy az a) alkérdésben szereplő két kidobott objektum egymáshoz képest ellenkező irányban mozog, szétrepülési sebességük egyenlő, $v = \beta c$. Ekkor a b) alkérdés eredményei alapján β és φ kiszámítható az ω_1 és ω_2 szögsebességek, valamint az R távolság ismeretében. Itt φ a b) alkérdésben értelmezett szög a bal oldali objektumra vonatkozóan, ami az a) alkérdésben az 1 indexnek felel meg. Vezessünk le képleteket arra, hogyan kell ismert mennyiségekből kiszámítani β és φ értékét. Határozzuk meg β és φ értékét az a) alkérdésben megadott számértékek alapján.

d) A b) alkérdés szerinti egy-test esetben keressük meg annak feltételét, hogy a látszólagos $v'_\perp$ transzverzális sebesség nagyobb legyen, mint a c fénysebesség. Írjuk ezt a feltételt $\beta > f(\varphi)$ alakba, az f függvényre keressünk analitikus alakot. Rajtoljuk le a (β,φ) koordinátasík fizikailag értelmes tartományát. Satírozzuk be azt a tartományt, ahol $v'_\perp > c$ teljesül.

e) A b) alkérdésben tárgyalt egy-test esetben találj egy képletet a $v'_\perp$ látszólagos transzverzális sebesség maximális $(v'_\perp)_{max}$ értékére adott β esetén! Észrevehetjük, hogy ez a maximális látszólagos transzverzális sebesség minden határon túl nőhet, ha $\beta \to 1$.

f) Az R értékére vonatkozóan a bevezetőben megbecsült érték nem megbízható. Ezért a kutatók azon kezdtek gondolkozni, hogy létezik-e jobb és közvetlenebb módszer R meghatározására. Az egyik ötlet a következő:

Tételezzük fel, hogy a két kidobott tárgy színképében azonosítjuk és megmérjük egy színképvonal Doppler-eltolódott λ_1 és λ_2 hullámhosszait, ami nyugvó objektum sugárzása esetén λ_0 volna. Induljunk ki a relativisztikus Doppler-eltolódás képletéből:

$$\lambda = \frac{\lambda_0(1-\beta\cos\varphi)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.1).$$

Mint korábban, most is tételezzük fel, hogy a két tárgy sebessége ugyanolyan nagyságú. Mutassuk meg, hogy az ismeretlen $\beta = v/c$ kifejezhető λ_0, λ_1, λ_2 függvényeként a következő képlettel:

$$\beta = \sqrt{1-\frac{\alpha\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}} \qquad (3.2).$$

Adjuk meg az α együttható számértékét. Észrevehetjük, hogy ily módon a hullámhosszak mért értékeiből gyakorlati becslést kaphatunk az R távolságra.